Ministério da Educação

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

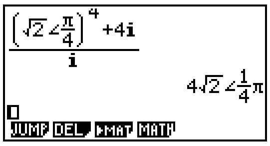
VERSÃO 1

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Determine o número complexo $w = \dfrac{{z_1}^4 + 4i}{i}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.



4. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.**, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas oblíquas.

4.2. Mostre que a função f tem um extremo relativo no intervalo $]2, +\infty[$

4.3. Determine a área do triângulo $[ABC]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

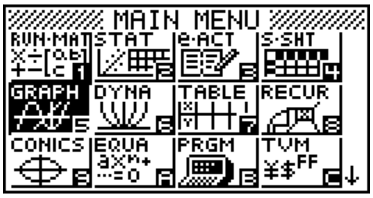
- A, B e C são pontos do gráfico da função f
- A e B são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo $]0, 2]$, da equação $f(x) = f(15)$
- C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função f, no intervalo $]0, 2]$, e cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 2]$

Na sua resposta, deve:

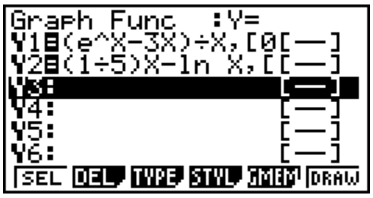
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A, B e C, com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

Proposta de resolução:

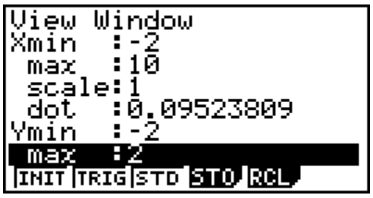
1. Começar por entrar no menu GRAPH, seleccionar, com as teclas direccionais, o respectivo ícone e pressionar a tecla EXE;



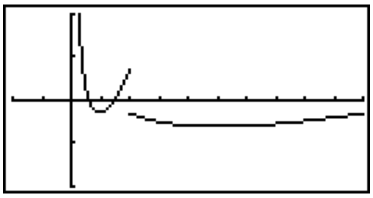
Seguidamente, introduza a expressão analítica da função em Y1 e Y2, dado que é uma função definida por ramos;



Defina uma janela de visualização adequada. Em SHIFT V-Window, seleccione, por exemplo:



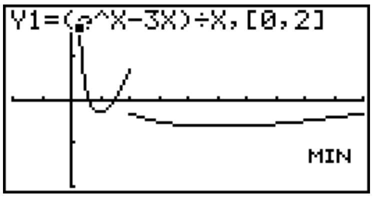
Após confirmar com EXE, seleccione F6 DRAW para visualizar uma representação gráfica;



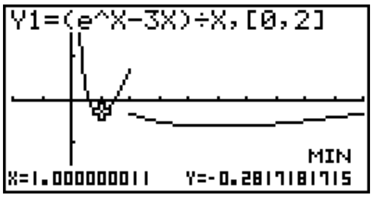
Por observação da representação gráfica, podemos concluir que existe uma assimptota vertical unilateral, $x = 0$.

Existência de mínimos:

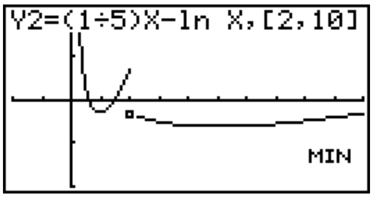
Seleccione SHIFT F5 G-Slv F3 MIN, a máquina selecciona o primeiro ramo;



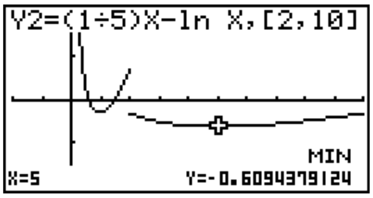
De seguida, clicar EXE visualiza a seguinte janela:



Repete o procedimento para Y2. Clica em EXIT EXE SHIFT F5 G-Slv F3 MIN, seleccione o segundo ramo com a tecla direccional ▼ ,



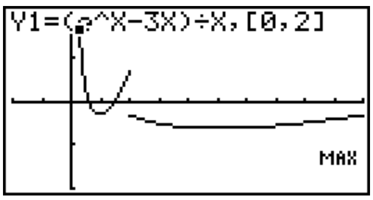
De seguida, clicar EXE visualiza a seguinte janela:

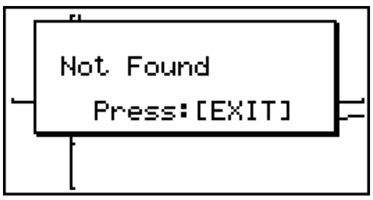


Conclui-se que a função tem dois mínimos, y=-0.61 e y=-0.28.

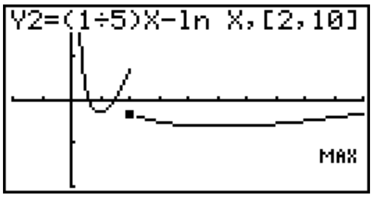
Existência de máximos:

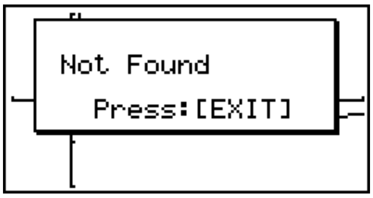
Seleccione EXIT EXE SHIFT F5 G-Slv F2 MAX, a máquina selecciona o primeiro ramo, de seguida EXE





Repete o procedimento para Y2. Clica em EXIT EXE SHIFT F5 G-Slv F2 MAX, seleccione o segundo ramo com a tecla direccional ▼ , EXE



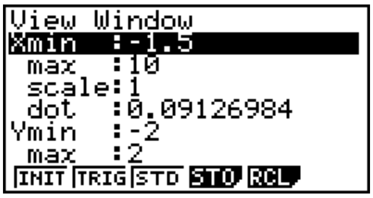


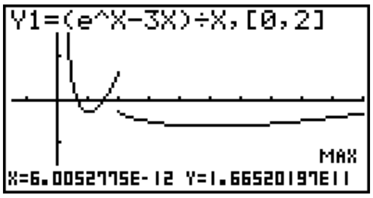
Conclui-se que a função não tem máximos.

Observação:

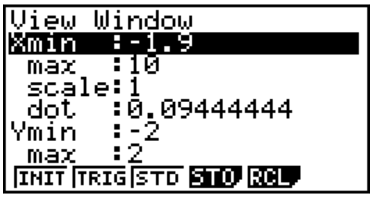
Se na janela SHIFT V-Window alterar os valores de Xmin:

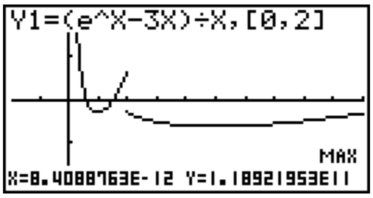
Exemplo 1:





Exemplo 2:

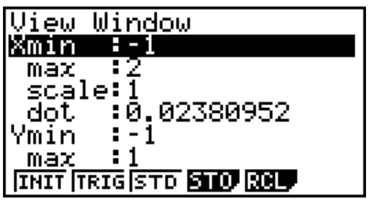




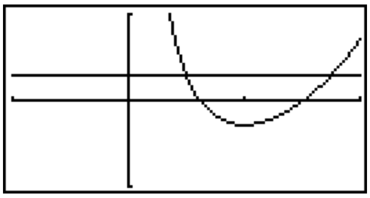
Para cada valor apresentado a calculadora encontra um máximo, no entanto sabemos que tal não é possível. Assim, devemos definir a janela de visualização de acordo com o domínio da função

Comece por introduzir o valor da função *f* para $x = 15$, $f(15) = 3 - \ln 15$

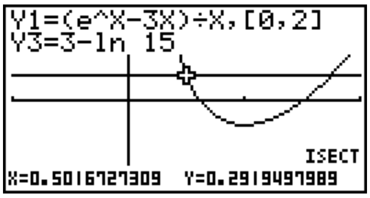
Seleccione na janela os valores:



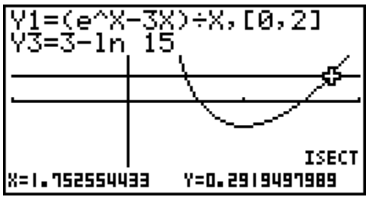
Trace a representação gráfica das funções Y1 e Y3. Obtém-se:



Para determinar as coordenadas do ponto A seleccione F5 G-Slv F5 ISCT,



Para determinar as coordenadas do ponto B , clique na tecla direccional



As coordenadas do ponto C foram determinadas anteriormente na alínea 1.2.
As coordenadas dos pontos A, B e C são:

A (0,50;0,29)
B (1,75;0,29)
C (1,00;-0,28)

Para determinar a área do triângulo [ABC] temos que determinar o comprimento da base, $\overline{AB}$, e a altura, h, do triângulo.

$$\overline{AB} = 1{,}75 - 0{,}50 = 1{,}25$$
$$h = 0{,}29 + 0{,}28 = 0{,}57$$

Assim, a área do triângulo [ABC] é dada por:

$$A = \frac{1{,}25 \times 0{,}57}{2} \approx 0{,}4$$

Realizado pelas professoras da ES Pinhal Novo:

Mara Alexandra Gomes de Sousa
Natércia Gisela Azevedo Oliveira
Maria Rita Pote Magriço
Sandra Margarida Brites C. Lourenço