GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/1.ª Fase 13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

GRUPO I

3.1. Admita que as peças têm espessura desprezável. Na tabela, estão registados os valores das áreas, em dm^2, arredondados com quatro casas decimais, das primeiras dez peças do conjunto.

Número de lados da peça	Área (dm^2)
3	0,4330
4	1,0000
5	1,7205
6	2,5981
7	3,6339
8	4,8284
9	6,1818
10	7,6942
11	9,3656
12	11,1962

Admita ainda que a relação entre a área, em dm^2, de cada peça e o respetivo número de lados pode ser modelada por uma função quadrática, cuja variável independente é o número de lados da peça.

Estime a área da peça que tem 15 lados.

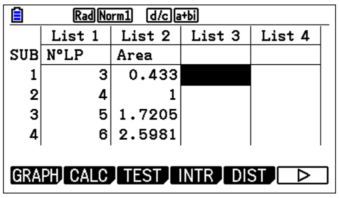
Apresente o resultado, em dm^2, arredondado às décimas.

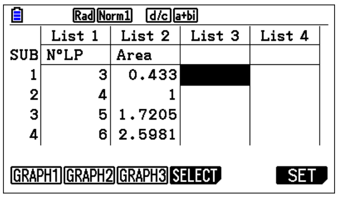
Recorra à calculadora e utilize a regressão quadrática para obter uma expressão de uma função quadrática que se ajuste aos dados da tabela.

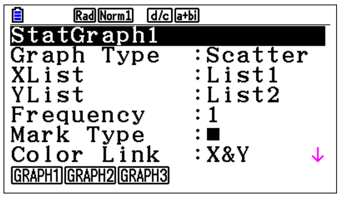
Apresente os valores numéricos da expressão, obtidos na calculadora, arredondados com, pelo menos, quatro casas decimais.

Proposta de Resolução

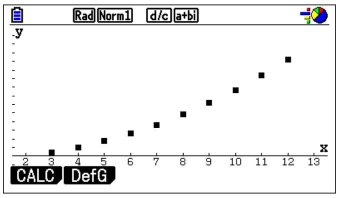
Depois de introduzir os valores nas listas, temos de desenhar um gráfico estatístico com base nas listas. Para tal, selecionamos F6 (SET). Depois de configurado o gráfico, retornamos ao ecrã anterior e desenhamos a nuvem de pontos (F1 – GRAPH1)

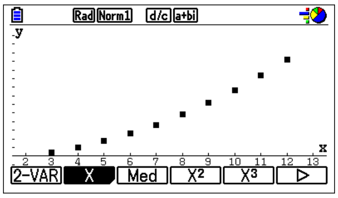


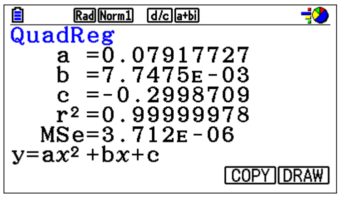




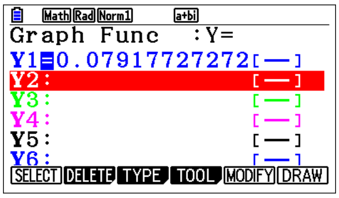
Com o gráfico desenhado, escolhemos F1 (CALC) e selecionamos a opção X^2 (F4). Obtemos os valores para os parâmetros *a*, *b* e *c*. Podemos copiar a expressão da regressão quadrática para o menu gráfico, pressionando F5 (COPY).

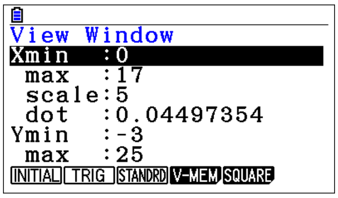


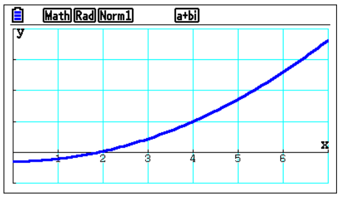




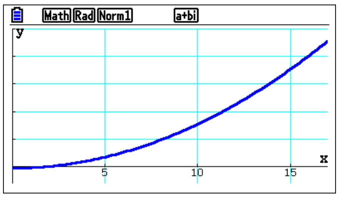
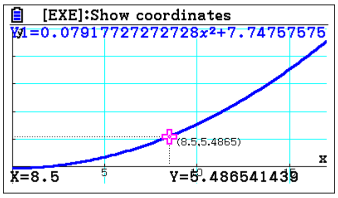
No menu gráfico, definimos a janela de visualização para $x \in [0,17]$. Desenhamos o gráfico usando a opção F6 (DRAW).

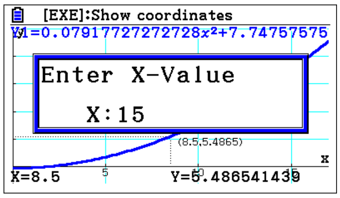


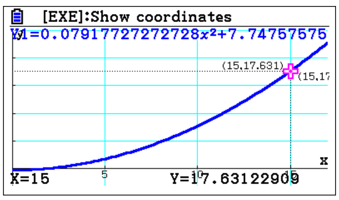


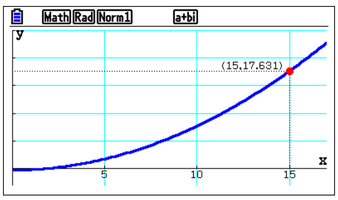


Activamos o TRACE (F1), introduzimos o valor 15 para *x* e ao pressionar a tecla EXE obtemos o valor correspondente para y.







A área estimada do polígono de 15 lados é aproximadamente 17,6 dm^2

GRUPO II

Numa certa empresa de suinicultura, é necessário fornecer a cada animal adulto, diariamente, além da alimentação padrão, um suplemento de Granulado e Farinha.

Sabe-se que:

- cada quilograma de Granulado contém 30 gramas de hidratos de carbono, 75 gramas de vitaminas e 45 gramas de proteínas;
- cada quilograma de Farinha contém 75 gramas de hidratos de carbono, 15 gramas de vitaminas e 45 gramas de proteínas;
- o suplemento diário de Granulado e Farinha dado a cada animal adulto, para ser adequado, deve conter pelo menos 300 gramas de hidratos de carbono, pelo menos 225 gramas de vitaminas e pelo menos 315 gramas de proteínas;
- o suplemento diário dado a cada animal adulto não deve conter mais de 10 quilogramas de Granulado nem mais de 15 quilogramas de Farinha.

Sabe-se ainda que cada quilograma de Granulado custa 5 euros e que cada quilograma de Farinha custa $2,5$ euros.

Designe por x o número de quilogramas de Granulado que o suplemento diário dado a cada animal adulto contém e por y o número de quilogramas de Farinha que o suplemento diário dado a cada animal adulto contém.

Determine quantos quilogramas de Granulado e quantos quilogramas de Farinha deve conter o suplemento diário dado a cada animal adulto, de modo que, nas condições referidas, o custo desse suplemento seja mínimo.

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objetivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- calcular o número de quilogramas de Granulado e o número de quilogramas de Farinha que o suplemento diário dado a cada animal adulto deve conter, correspondentes à solução do problema.

Proposta de Resolução

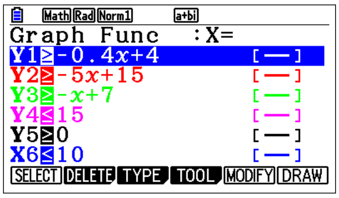
A função objetivo, que se pretende minimizar, é o custo. A expressão é a seguinte:

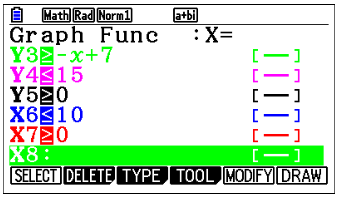
$$(x, y) = 5x + 2,5y$$

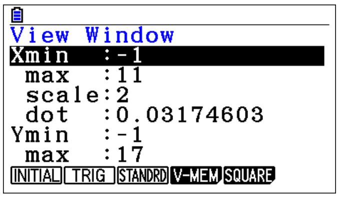
As restrições do problema são:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 30x + 75y \geq 300 \\ 75x + 15y \geq 225 \\ 45x + 45y \geq 315 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 2x + 5y \geq 20 \\ 5x + y \geq 15 \\ x + y \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ y \geq -0.4x + 4 \\ y \geq -5x + 15 \\ y \geq -x + 7 \end{cases}$$

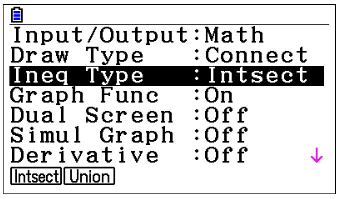
No menu gráfico vamos introduzir as restrições no menu gráfico. Definimos a janela de visualização, utilizando como referencia as restrições para x e y.



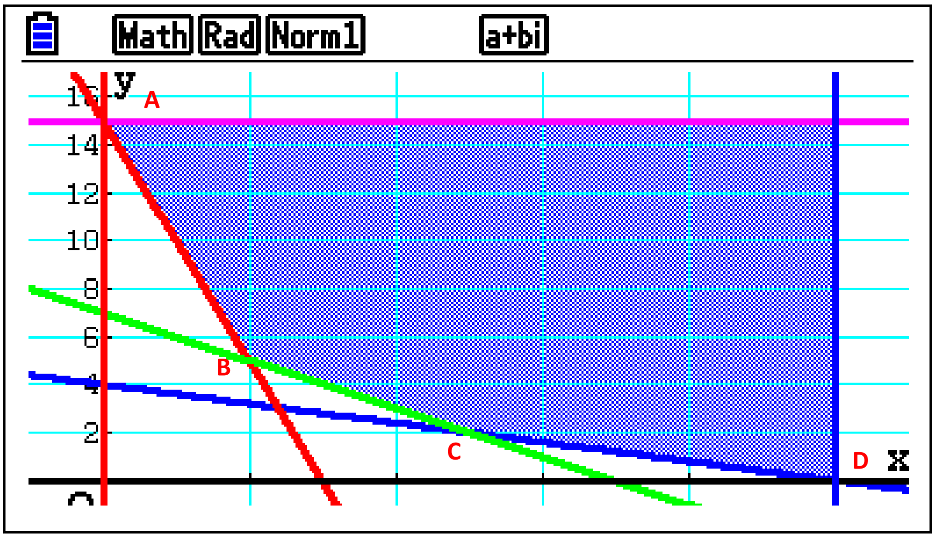




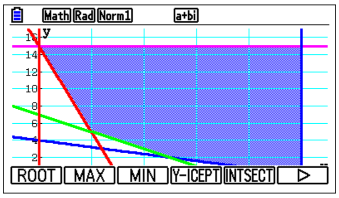
Nota: no SET UP da máquina, deve ter activo a opção “Intsect” para “Ineq Type”

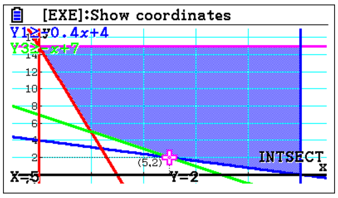


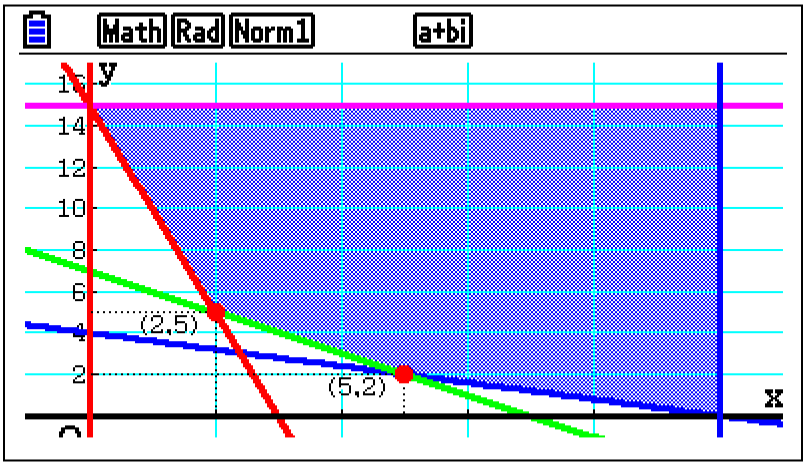
A representação gráfica é a seguinte:



Pretendemos calcular os pontos acima referidos. Para o fazer, teremos de utilizar a opção de intereseção. Seleccionamos F5 (G-SOLV) seguido de F5 (INTSECT). Escolhemos as funções das quais pretendemos obter os pontos de interseção. Os pontos são exibidos.







Sabemos que as coordenadas dos pontos são:

$A(0\,,15)$ $\quad$ $B(2\,,5)$ $\quad$ $C(5\,,2)$ $\quad$ $D(10\,,0)$

Ao calcular o custo para cada um dos pontos, obtemos:

$$C(0\,,15) = 5\times 0 + 2{,}5\times 15 = 32{,}5$$
$$C(2\,,5) = 5\times 2 + 2{,}5\times 5 = 22{,}5$$
$$C(5\,,2) = 5\times 5 + 2{,}5\times 2 = 30$$
$$C(10\,,0) = 5\times 10 + 2{,}5\times 0 = 50$$

Conclui-se que a solução ótima do problema, correspondente ao custo mínimo (22,50 €), é de 2 Kg de Granulado e 5 Kg de Farinha para suplemento diário de cada animal.

GRUPO III

Uma determinada empresa da área de informática tem dois departamentos: o departamento FERMAT e o departamento GALOIS.

Considere que o resultado líquido de um departamento, obtido num certo dia, consiste na diferença entre os ganhos e os custos contabilizados até ao final desse dia.

Admita que o resultado líquido diário do departamento FERMAT, em **milhares de euros**, no dia de ordem x do ano de 2010, é dado por

$$f(x) = -\,0{,}00001\,x^3 + 0{,}00533\,x^2 - 0{,}77216\,x + 26{,}53300 \qquad \text{com } x \in \{1, \ldots, 365\}$$

Por exemplo, no dia 1 de março de 2010, sexagésimo dia desse ano, o resultado líquido obtido pelo departamento FERMAT é dado por $f(60)$

1. Determine o resultado líquido do departamento FERMAT obtido no dia 15 de fevereiro de 2010.

Apresente o valor do resultado líquido em euros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

2. Determine o maior resultado líquido diário do departamento FERMAT obtido nos últimos seis meses do ano de 2010.

Apresente o valor do resultado líquido em euros, arredondado às unidades.

3. Admita que o resultado líquido diário do departamento GALOIS, em **milhares de euros**, no dia de ordem x do ano de 2010, é dado por

$$g(x) = \left(1 - e^{(0{,}005\,x - 0{,}5)}\right) \times f(x) \qquad \text{com } x \in \{1, \ldots, 365\}$$

em que f é o modelo relativo ao departamento FERMAT.

Determine o número de dias do ano de 2010 em que o resultado líquido diário do departamento FERMAT foi superior ao resultado líquido diário do departamento GALOIS.

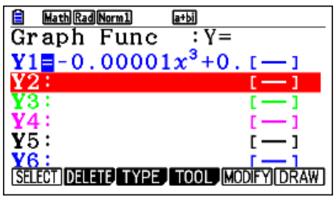
Proposta de Resolução

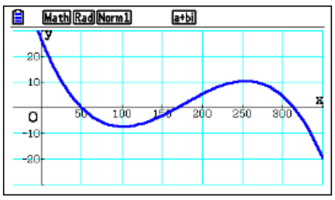
1.

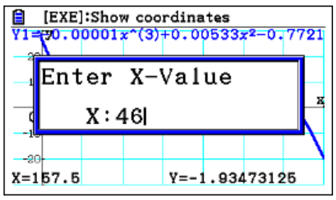
Vamos introduzir a função em Y1 e desenhar usando a opção F6 (DRAW).

Como o mês de Janeiro tem 31 dia e em Fevereiro contamos com 15, vamos calcular f(46).

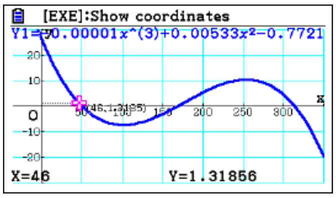
Com o gráfico desenhado, ativamos o TRACE (F1), introduzirmos 46 e pressionamos EXE.





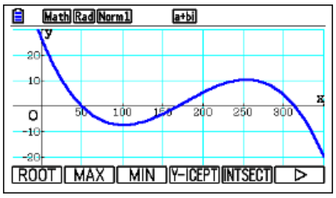


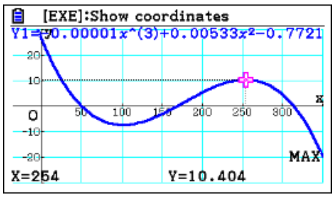
O resultado é exibido no ecrã da calculadora.

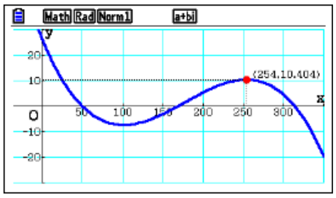


O resultado liquido no dia 15 de Fevereiro é de aproximadamente 1 319€

2.
Para determinar o maior resultado liquido nos últimos 6 meses, vamos determinar o máximo da função. Com o gráfico desenhado, usamos a opção G-SOLV (F5) e escolhemos MAX (F1).

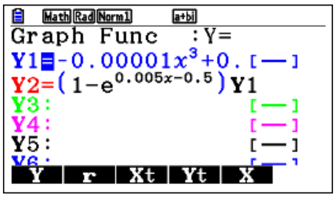


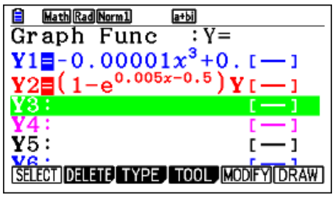


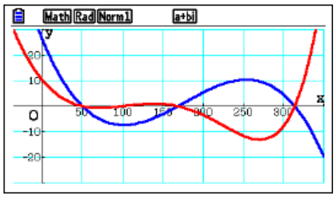


O maior resultado líquido diário foi de cerca de 10 404€.

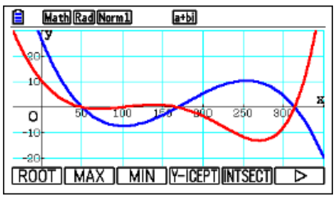
3.
Em, Y2 introduzimos a segunda expressão. Para utilizar o valor da função escrita em Y1, devemos utilizar o Y que se encontra em F1.
Obtemos a seguinte reapresentação gráfica.

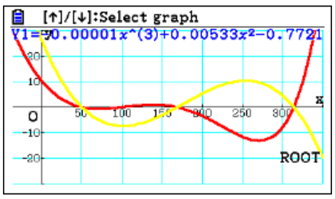




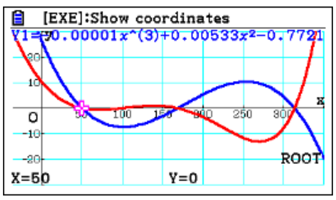


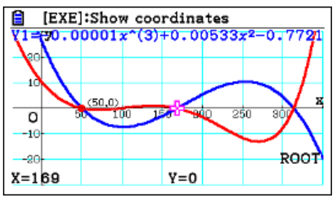
As duas funções intersetam-se nos pontos que correspondem aos zeros de *f*.
Esta situação ocorre porque *g* é o produto de *f* por uma outra função.
Para calcular os zeros da função, escolhemos F5 (G-SOLV) e escolhemos F1 (ROOT). Seleccionamos a função que queremos obter os zeros (EXE) e o primeiro ponto e exibido.

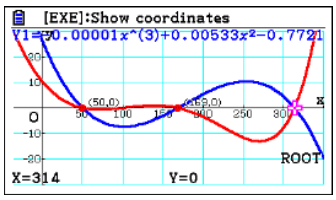




Para determinar os restantes pontos, use a seta do cursor para a direita.







Os zeros de *f* são: x = 50 ou x = 169 ou x = 314

Estes números representam os dias em que os resultados líquidos foram iguais nas duas empresas.

Lendo o gráfico, verificamos que $f(x) > g(x)$ quando $x < 50$ ou $169 < x < 314$.

O número total de dias em que o resultado líquido diário do departamento FERMAT foi superior ao do departamento GALOIS é

49 + (313 – 169) = 49 + 144 = 193 dias